

# 基于小波域层次 Markov 模型的图像分割

李旭超 朱善安 朱胜利

(浙江大学电气工程学院, 杭州 310027)

**摘要** 针对两个状态的有限高斯混合模型逼近小波系数的不足和小波域隐马尔可夫树标号场相互独立的缺点, 提出了一种基于小波域层次马尔可夫模型的图像分割算法, 这种模型用有限通用混合模型逼近小波系数的分布, 使有限高斯混合模型只是其一种特殊情况; 在标号场的先验模型确定上, 利用马尔可夫模型描述标号场的局部作用关系, 给出标号场的具体表达式, 克服了小波域马尔可夫树模型标号场相互独立的不足, 然后利用贝叶斯准则, 给出相应的分割因果算法。该模型不仅具有空域马尔可夫模型有效的递归算法的优点, 同时具有小波域隐马尔可夫树模型中的马尔可夫参数变尺度行为。最后用真实的图像和合成图像同几种分割方法进行了对比实验, 实验结果表明了本文算法的有效性和优异性。

**关键词** 小波域马尔可夫随机场 最大后验概率 图像分割 EM 算法

**中图分类号**: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)02-0308-07

## Image Segmentation Based on Wavelet Domain Hierarchical Markov Model

LI Xu-chao, ZHU Shan-an, ZHU Sheng-li

(Electrical Engineering College, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** In order to overcome the deficiency of approximation to the wavelet coefficient joint probability with two-state Gaussian mixture model (GMM) and the shortcoming of the independence between wavelet labels in wavelet domain hidden Markov tree model (HMT), a new image segmentation algorithm based on wavelet domain hierarchical Markov model is proposed. The new image model is described as wavelet coefficient joint distribution with finite general mixture model (FGM), while the GMM in HMT model is only one of the FGMs. Utilizing on the local interactions of labels described by Markov random field (MRF), the label field priori probability model with explicit expression, which overcomes the shortcoming of the independence between labels in the HMT model, is determined. Using Bayes principle, the recursive algorithm of image segmentation is derived. The proposed model inherits not only the characteristics of spatial domain hierarchical MRF model with effective recursive algorithm but also the characteristics of HMT model with the variable Markov parameters in different scales. The experiments with real images and synthetic texture images are carried out, the results show that the proposed method outperforms other standard segmentation methods, such as accurately locating image edges, correctly identifying different regions.

**Keywords** wavelet domain Markov random field, maximum a posterior (MAP) probability, image segmentation, Expectation-maximization algorithm

## 1 引言

空域非因果的马尔可夫 N-MRF (non-causal

Markov random field) 模型是贝叶斯图像分割中常用的方法, 其中像素的特征场常用高斯分布来建模; 像素的标号场用建立在平面网格上的 MRF, 等价于用 Gibbs 分布来建模, 然后根据贝叶斯准则, 利用标号

收稿日期: 2005-05-26; 改回日期: 2005-11-10

第一作者简介: 李旭超(1974 ~ ), 男, 浙江大学电气工程学院博士研究生。主要研究方向为小波理论与马尔可夫随机场在图像处理中的应用等。E-mail: 6495312@zju.edu.cn

场和像素的特征场相互作用,获得标号场的最大后验概率 MAP(maximum a posterior)或最大后验边缘概率,从而完成图像的分割过程。这种建立在像素级非因果的 N-MRF 模型具有完美的数学推导和理论框架,在计算机视觉中得到了广泛的应用<sup>[1]</sup>。建立在像素级的特征场模型通常有利于形成较大一致的区域,其可能过分平滑图像的边缘等纹理特性,甚至抹杀掉较小的隔离区域和扭曲图像的边缘。同时,由于图像的非平稳性,固定尺度先验模型的马尔可夫参数具有有限能力描述图像较大尺度的行为,虽可以通过增加邻域像素的方法来得到改善,但这明显增加了相互作用参数的数量,使得分割算法的复杂度增加。另外,在求标号的 MAP 或最大后验边缘概率时,精确解很难得到,常用迭代方法求标号的后验能量函数最小值所对应的状态来代替,由于后验能量函数的非凸性,使用确定性松弛算法,如 ICM(iterative conditional mode)方法、动态规划及均值场淬火等,常得到局部最优解,这对准确的图像分割产生不利影响;用随机松弛算法如模拟退火, Gibbs 采样器等虽可以得到标号场的全局最优解,但计算量是巨大的。

近年来提出的具有因果特性分层的 H-MRF 模型(Hierarchical MRF)引人关注<sup>[2,3]</sup>,这种模型用尺度间的先验模型取代空域的先验模型,先验模型的标号场不是定义在空域的网格上,而是定义在一系列尺度的网格上,标号场先验信息通过尺度间进行传播,但像素的特征场仍建立在平面的网格上,这种建立在像素级具有因果特性的 H-MRF 模型在图像去噪、重构、分割和编码等领域得到广泛的应用。但由于图像的特征场仍然建立在像素级的基础上,因此很难刻画图像的非平稳性。同时这种像素级金字塔式分解结构不具有方向性和非冗余性。根据贝叶斯 MAP 的表现形式,标号的确定是特征场和标号场共同作用的结果,而这种标号场塔式分解结构,只是最精细尺度的标号场用到了本尺度的特征场,而其余尺度没有用到本尺度的特征场,仍然是利用最精细尺度的特征场,因此从本质上来说,这种层次模型仍然具有边缘定位不准确和图像特征场很难刻画的弱点。

随着小波理论的应用日益成熟,小波对于刻画图像的非平稳性提供了强有力的工具,小波变换具有方向性、非冗余性、多分辨率特性,以及小波系数具有持续性和重拖尾的非高斯分布等特性<sup>[4,5]</sup>。利

用小波变换的多分辨率特性,使特征场建立在一系列小波域上,从而使相应分辨率的标号场都利用本尺度的特征场,这样有利于描绘图像的非平稳性,随着分辨率的不同,小波系数具有不同的特征向量,这样有利于反映特征场的本质特征。同时对每一小波系数引入有限的隐状态,以反映小波系数的非高斯分布。文献[6]用两个状态的高斯混合分布(GMM)来描述小波系数的非高斯分布,用较大状态的方差表示边缘、纹理的小波系数,用较小状态的方差表示平滑区域的小波系数,这种模型适用于大多数真实图像,但其不具有通用性。如受光照影响的交通图像分割问题<sup>[7]</sup>,背景为较平滑的区域,而物体有纹理则相应的小波系数较大,而阴影的小波系数介于背景与物体之间,因此用两个状态的小波系数很难表示图像的特征。又如文献[8]中,一幅由图片和文字组成的文本,背景较平滑,文字的小波系数变化较小,而图片的小波系数变化较大,这种情况下两个状态的小波系数 GMM 模型不具有通用性,同时高斯分布与小波系数服从非高斯分布相背离。文献[9]指出了小波系数用有限通用混合分布(FGM)逼近更合理,本文对小波系数的特征场用有限通用混合分布来描述,有限高斯分布仅是其特殊情况。另一方面,在标号场先验模型的确定上, HMT(hidden Markov tree)模型<sup>[6]</sup>没有给出具体的表达式,同时认为标号与父节点周围 36 个小波系数的标号有关,这有悖于小波系数的紧支撑性且与小波系数局部相关性相矛盾,另外认为小波系数的标号是相互独立的,这与尺度间小波系数的持续性和尺度内小波系数的紧支撑性相背离,因为父节点与子节点往往具有相同的标号,同时子节点的标号与父节点周围的 3 个节点小波系数的标号息息相关。标号场应体现小波系数的标号的相互作用关系而不是独立的作用关系。在标号场中,根据尺度间小波系数的持续特性,本文子节点的标号由父节点和父节点的 3 个兄弟节点共同决定,这是由小波系数的持续性和紧支撑性决定的,而不同于 HMT 模型认为由 36 个节点分别决定,这不符合标号场的局部作用关系。根据 Bouman 等人<sup>[3]</sup>的思想,本文给出了标号场先验模型的具体表达式。利用小波系数的持续性和紧支撑性,建立尺度间标号场的先验模型,这样随着尺度的不同,标号场先验模型的马尔可夫参数具有变尺度行为,因为较大的马尔可夫参数易形成长边缘,较小的马尔可夫参数易形成微边缘,同时粗

尺度标号的确定对细尺度标号的确定具有指导行为,这样有利于边缘的确定。为保证边界的平滑性,在因果先验模型的确定上,考虑父节点和与父节点来自同一节点的其他 3 个节点对子节点标号确定的影响。根据小波系数的持续性,粗尺度的节点携带子节点的全部信息;根据小波系数的紧支撑性,同一尺度相邻节点具有相同的标号。这样解决了建立在像素级 MRF 模型的限制性,同时这种小波域层次 MRF 模型具有因果行为,形成有效的递归算法。

这种建立在小波域层次 MRF 模型与建立在像素级非因果的 N-MRF 模型不同之处在于,其标号场和观测场都是由多层随机场组成,而不是单层随机场;此模型与建立在小波域上的 HMT 模型不同在于,其特征场用有限通用混合模型逼近小波系数的分布,而标号场由父节点和父节点的 3 个兄弟节点共同决定,而不是由父节点周围 36 个节点分别决定,且本文给出标号场相互作用的具体表达式。最后给出真实图像和合成图像的不同方法对比分割结果和分析。

## 2 小波域层次 Markov 模型

如图 1 所示,图像经  $J$  级小波变换后,形成  $3J + 1$  幅不同尺度的子带图像,相应地形成  $3J + 1$  个 2 维网格位置集,记为:  $s = \{s^1, s^2, \dots, s^j\}$ , 其中,  $s^j$  对应于  $J$  级小波变换的位置集  $s^j = \{s^{LL(j)}, s^{LH(j)}, s^{HL(j)}, s^{HH(j)}\}$ ,  $s^j = \{s^{LH(j)}, s^{HL(j)}, s^{HH(j)}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J - 1$ 。  $LL(J)$  为位置集的根节点,它有 3 个子女分别位于 3 个方向子带  $LH(J)$ ,  $HL(J)$ ,  $HH(J)$  相应位置,这 3 个子节点分别形成 3 棵小波系数层次树。定义在位置集上相应的小波系数形成观测场,  $y$  记为:  $y_s = \{y_{s^1}, y_{s^2}, \dots, y_{s^j}\}$ , 其中  $y_{s^j}$  为最粗尺度的小波系数,只有一个节点;  $y_{s^1}$  对应最细尺度的小波系数。相应观测场,有小波系数的标号场  $x_s = \{x_{s^1}, x_{s^2}, \dots,$

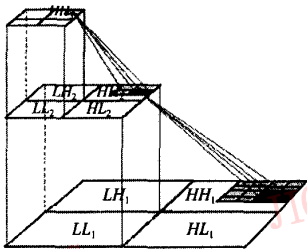


图 1 小波变换层次结构

Fig. 1 Wavelet transform hierarchical

$x_{s^j}\}$ , 因为是不可观测的,所以称为隐标号随机场,其中标号  $X_{s^j}$  对应最高分辨率小波系数  $Y_{s^j}$  的标号,依次类推,标号  $X_{s^1}$  对应最低分辨率小波系数  $y_{s^1}$  的标号。每个小波系数的节点相应同一空间位置更精细尺度下的 4 个小波系数为它的子节点,记为  $y_{c(s)}, x_{c(s)}$ , 每个节点有一个父节点记为  $y_{p(s)}, x_{p(s)}$ , 如图 2、3 所示。最上层的根节点没有父节点,最下层节点为叶子节点,没有子节点。图 2 中的箭头连线表示状态的转移关系,方框代表小波系数,浅色黑点表示隐状态;图 3 的箭头连线表示标号的转移关系,黑点表示隐标号。用条件分布  $f(y_s | x_s)$  表示观测的小波系数对标号的依赖关系,用边缘分布  $p(x_s)$  表示标号的先验分布,图像分割的过程就是处理标号的先验分布和观测的条件分布的相互关系,从而根据贝叶斯准则寻求真实标号的一个估计。为了更好地反映特征场,每一个小波系数引入有限个隐状态,以逼近小波系数的非高斯分布,用  $f(y_s | v)$  表示观测场对状态的依赖关系,用  $f(v)$  表示状态的概率分布。

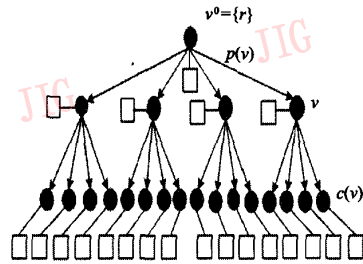


图 2 小波系数和状态层次树

Fig. 2 Wavelet coefficients and state hierarchical tree

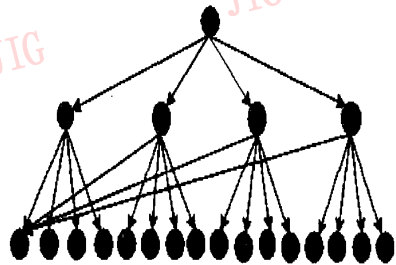


图 3 小波系数标号层次树

Fig. 3 The wavelet coefficient labels hierarchical tree

为了便于后面进行推导,假设小波域层次 Markov 模型具有如下的一些性质:

- (1) 根据小波变换的去相关性,假设各子带间小波系数相互独立,子带内不同尺度的小波系数相互独立且具有相同的分布。

(2) 根据小波系数的持续性,同一子带尺度间标号具有马尔可夫特性,即小波系数的标号仅与上一尺度的标号有关,与其他尺度的标号无关,即  $p(x_{j,i} | x_{j,i+1}, \dots, x_{j,i}) = p(x_{j,i} | x_{j,i+1})$ 。

(3) 任意节点的观测值  $y_i$  仅依赖于本节点的标号  $x_i$ , 而与其余节点的标号无关。

(4) 每一小波系数由有限个隐状态组成,其中小波系数的状态与小波系数的标号相互独立,任意节点都形成独立的小波系数树。

由上述的一些性质和贝叶斯准则,可有  $y_i$  和  $x_i$  的联合概率分布:

$$p(x_i, y_i) = p(x_{j,i}) \prod_{i' \in S} f(y_{i'} | x_{i'}) \prod_{i'=1}^J p(x_{i'-1} | x_{i'}) \quad (1)$$

## 2.1 用 FGM 模型描述小波系数的特征场

对于图像的特征场,采用什么样的概率分布逼近图像的纹理特征是一个值得研究的问题。对于雷达图像,在噪声为全显影的条件下,其像素的联合概率密度函数服从 Gamma 分布<sup>[10]</sup>。文献[11]在研究小波域最优解码器时,用有限 Laplace 混合分布来逼近小波系数的分布。而对于大多数应用,都用具有两个状态的 GMM 逼近小波系数的联合分布,这种情况具有一定的通用性,适用于图像主要是由边缘和平滑区域组成的图像。但在受光照影响的交通图像<sup>[7]</sup>和由文字和图片组成的文本图像<sup>[8]</sup>用两个状态的 GMM 逼近小波系数的分布缺乏有效性。另外,在小波域中,随着小波分解级数的增加,小波系数的幅值越来越小,且样本点的数目越来越少,呈现出重拖尾的非高斯分布,这种情况下用高斯分布逼近期望图像的小波系数纹理特征缺乏合理性,本文采用有限通用混合模型<sup>[9]</sup>逼近小波系数的重拖尾的非高斯分布,这种模型可以通过调节参数  $h$  来控制核函数的形状。同时对每个小波系数引入有限个隐状态,当  $h=2$  时,FGM 模型变为 GMM 模型<sup>[6]</sup>,当  $h=1$  时,FGM 模型变为文献[11]的情况。图像经小波变换后得到小波系数集  $y_j = \{y_{j,i}^D | D=1,2,3; j=1,2,\dots,J\}$ ,  $D$  表示 3 个方向的子带。图像经小波变换后,每个小波系数可用具有零均值的有限隐状态的通用混合概率分布函数来表示:

$$f(y_{j,i}^D) = \sum_{v_{j,i}^D=1}^k \pi_{v_{j,i}^D} f(y_{j,i}^D | v_{j,i}^D) \quad (2)$$

其中,  $f(y_{j,i}^D | v_{j,i}^D) = B \cdot \exp[-\beta y_{j,i}^D]^\beta$

$$\beta = \sigma_{v_{j,i}^D}^{-1} \left[ \frac{\Gamma(3/h)}{\Gamma(1/h)} \right]$$

$$B = \frac{\beta h}{2\Gamma(1/h)}$$

$$f(v_{j,i}^D = k) = \pi_{v_{j,i}^D}$$

式中,  $\pi_{v_{j,i}^D}, \sigma_{v_{j,i}^D}$  分别表示  $j$  尺度  $s^j$  节点在状态  $v_{j,i}^D = k$  的边缘概率密度和方差有关的参量,满足  $0 < \pi_{v_{j,i}^D} < 1$ ,

$\sum_{v_{j,i}^D=1}^K \pi_{v_{j,i}^D} = 1$ ,  $h$  为形状参数,  $K$  为隐状态数,  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数。  $f(y_{j,i}^D | v_{j,i}^D)$  的物理意义为:在状态  $v_{j,i}^D$  的条件下,小波系数  $y_{j,i}^D$  服从标准方差为  $\sigma_{v_{j,i}^D}$  的通用高斯分布。由图 2 和假设可知,子节点的状态由父节点的状态决定,故尺度间父子节点间的状态关系可用一阶马尔可夫链来描述,记为  $a_{i,j,\rho(s^i)} = f(v_{j,i} | v_{\rho(s^i)})$ , 其中尺度为  $J$  的根节点状态变量分布函数为  $\pi_{j,i} = f(v_{j,i})$ , 图像经小波变换的系数观测值仅由当前节点的状态决定,记为式(2),故观测场的模型参数集可以表示为

$$\lambda = (a_{i,j,\rho(s^i)}, \pi_{j,i}, \sigma_{v_{j,i}}) \quad (3)$$

## 2.2 标号场的先验概率分布模型

在小波变换中,由于小波系数的持续性,相邻尺度间小波系数一般具有相同的标号,为保证边界定位的准确性,父节点的标号对子节点的标号起主导作用。利用小波系数的紧支撑性和为了保证边界的平滑性,来自同一节点的父节点和其他 3 个节点对小波系数标号确定有一定的影响,如图 3 所示,因此可以对这 4 个节点取不同的权重来确定小波系数的标号,表达形式如下:

$$p(x_{j,i} | x_{\rho(s^i)}) = \theta_{j,i} \cdot [2\delta(x_{j,i}, x_{\rho(s^i)}) + \delta(x_{j,i}, x_{\rho(s^i)+\tau})] / [5 + (1 - \theta_{j,i})/L] \quad (4)$$

式中,  $\delta(\cdot, \cdot)$  为采样函数,  $\tau = [(0, 1), (1, 0), (1, 1)]$ ,  $\theta_{j,i} \in [0, 1]$  表示节点  $s^i$  与其周围相邻节点具有相同标号的概率,  $1 - \theta_{j,i}$  表示将节点  $s^i$  的标号判为其他标号的随机概率,  $L$  为图像的标号数,根节点标号的先验概率取为均匀分布,即  $p(x_{j,i}) = \theta_{j,i}$ 。

## 3 小波域层次 Markov 模型分割算法

为了分割图像,已知在给定观测数据  $y_i$  的条件下,准确估计像素的标号  $x_i$ , 因此采用贝叶斯估计器将分割问题转化为最优化问题:

$$\hat{x}_i = \arg \min E[e(X_i, x_i) | Y = y_i] \quad (5)$$

式中,  $Y$  表示随机变量,  $e(X_i, x_i)$  为实际分割  $x_i$  与期望分割  $X_i$  不同时的耗费函数,贝叶斯估计器通过最优化这一耗费函数的数学期望,从而求得最佳标号  $\hat{x}_i$ 。

**3.1 小波域层次 Markov 模型的多尺度 MAP 准则的分割算法**  
若

$$e(X_s, x_s) = 1 - \delta(X_s, x_s) \quad (6)$$

式中,若  $X_s = x_s$ ,则  $\delta(X_s, x_s) = 1$ ;否则, $\delta(X_s, x_s) = 0$ 。将式(6)代入式(5)从而有 MAP 准则的估计器:

$$\hat{x}_s = \arg \max p(x_s | y_s) = \arg \max p(x_s, y_s) \quad (7)$$

由贝叶斯准则和任意节点都形成独立小波系数树的假设(叶子节点除外),则有

$$\begin{aligned} p(x_s, y_s) &= p(x_{s^j}, y_s | x_{s^j}) p(x_{s^j}) \\ &= p(x_{s^j}, y_s | x_{s^j}) p(x_{s^j}) \\ &= p(y_{s^j}, x_{C(s^j)}, y_{C(s^j)} | x_{s^j}) p(x_{s^j}) \\ &= p(x_{s^j}) p(y_{s^j} | x_{s^j}) \cdot \\ &\quad \prod_{C(s^j) \in s \setminus s^j} p(x_{C(s^j)}, y_{C(s^j)} | x_{s^j}) \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $C(s^j)$ 表示以节点  $s^j$  为根的树不包含  $s^j$  节点的所有节点, $s \setminus s^j$  表示在位置集  $s$  中不包含位置  $s^j$ 。故

$$\begin{aligned} \hat{x}_s &= \arg \max \ln p(x_{s^j}) p(y_{s^j} | x_{s^j}) + \\ &\quad \arg \max \ln \prod_{C(s^j) \in s \setminus s^j} p(x_{C(s^j)}, y_{C(s^j)} | x_{s^j}) \end{aligned} \quad (9)$$

要求  $\hat{x}_s$  最优估计,可使上式两项分别达到最大值。  
令

$$\begin{aligned} p(x_{C(s^j)}, y_{C(s^j)} | x_{s^j}) &= p(x_{C(s^j)} | x_{s^j}) \cdot p(y_{C(s^j)} | x_{C(s^j)}) \\ &= p(x_{C(s^j)} | x_{s^j}) \cdot p(y_{C(s^j)} | x_{C(s^j)}) \cdot \\ &\quad \prod_{C(s^{j-1})} p(x_{C(s^{j-1})}, y_{C(s^{j-1})} | x_{s^{j-1}}) \end{aligned} \quad (10)$$

依次类推,从而有从粗尺度到最精细尺度来确定小波系数的标号最终完成图像的分割过程:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{s^1} &= \arg \max \ln p(x_{s^1}) p(y_{s^1} | x_{s^1}) + \\ &\quad \sum_{j=2}^J \arg \max \ln p(x_{s^{j-1}} | x_{s^j}) \cdot p(y_{s^{j-1}} | x_{s^{j-1}}) \end{aligned} \quad (11)$$

**3.2 小波域层次 Markov 模型多尺度概率值的计算**

因为任意节点小波系数在给定标号条件下的概率值为该小波系数在所有状态下的概率值,即

$$p(y_{s^j} | x_{s^j}) = f(y_{s^j} | \lambda_{s^j}) = \sum_{v=1}^K f(v) f(y_{s^j} | v, \lambda_{s^j}) \quad (12)$$

对于以节点  $s^j$  为根的小波系数树的概率值为

$$\begin{aligned} f(y_{r(s^j)} | \lambda_{r(s^j)}) &= \sum_{v=1}^K f(y_{s^j} | v, \lambda_{s^j}) f(v) \cdot \\ &\quad f(y_{C(s^j)} | \lambda_{C(s^j)}) \end{aligned} \quad (13)$$

$j=1, 2, \dots, J, r(s^j)$  表示以  $s^j$  为根节点的小波系数树, $C[r(s^j)]$  表示以节点  $s^j$  为根的小波系数树中不包含根节点  $s^j$  的所有节点,则  $f(y_{r(s^j)} | \lambda_{r(s^j)})$  可以从细尺度到粗尺度被递归计算求得。

**3.3 小波域层次 Markov 模型分割算法的具体实现**

**3.3.1 从细尺度到粗尺度计算各节点小波系数的概率值**

(1) 初始化,  $j=1$

$$f(y_{s^1} | \lambda_{s^1}) = \prod_{v=1}^K \sum_{v=1}^K f(y_{s^1} | v_{s^1} = v) \cdot f(v_{s^1} = v) \quad (14)$$

(2)  $j=j+1$ , 移向树的更粗尺度

$$\begin{aligned} f(y_{s^j} | \lambda_{s^j}) &= \prod_{j^1=1}^K \sum_{v=1}^K f(y_{s^j} | v_{s^j} = v) \cdot \\ &\quad f(v_{s^j} = v | v_{s^{j-1}} = v') \cdot f(y_{s^{j-1}} | \lambda_{s^{j-1}}) \end{aligned} \quad (15)$$

(3) 当  $j=J$  时, 停止, 否则转到步骤 2)

**3.3.2 从粗尺度到细尺度完成 MAP 分割**

(1) 初始化,  $j=J$

$$f(v_{s^j}) = \pi_{s^j},$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{s^j} &= \arg \max \ln f(y_{s^j} | \lambda_{s^j}) \\ &= \arg \max \ln \prod_{j^1=1}^K \sum_{v=1}^K f(y_{s^j} | v_{s^j} = v) \cdot \pi_{s^j} \end{aligned} \quad (16)$$

(2) 递归计算  $j=j-1$ , 移向树的更精细尺度

$$\hat{x}_{s^j} = \hat{x}_{s^{j+1}} + \arg \max \ln f(y_{s^j} | \lambda_{s^j}) \cdot p(x_{s^j} | x_{s^{j+1}}) \quad (17)$$

(3) 若  $j=1$ , 则停止, 否则转到步骤 2。

## 4 小波域层次 Markov 模型参数估计

由前面的推导可知,要进行图像分割,必须计算特征场模型和先验模型的参数,由于仅有观测图像已知,常称为“不完全数据”,同时引入了状态和标号过程,常称为“丢失数据”,二者和观测数据各组成“完全数据”,而 EM(expectation maximization)算法是解决“不完全数据”的强有力工具,它是近年来发展很快且被应用很广的一种算法<sup>[12,13]</sup>,EM算法是基于不完全数据和初始参数来对丢失数据(如状态或标号)后验分布的有关参数估计,以一种迭代的方式逐渐增加观测数据的似然值。它主要由两步组成,E步计算完全数据的条件概率的数学期望;M步更新模型的参数。

### 4.1 估计特征场模型的参数

初始化,设置相应的初始化模型参数  $\lambda^{(t=0)}$ ,  $t$  为迭代次数。

(1) E 步 计算小波系数和状态组成的完全数据条件概率的数学期望,表达形式如下:

$$Q(\lambda | \lambda^{(t)}) = E_v[\ln f(y, v | \lambda) | y, \lambda^{(t)}] \quad (18)$$

(2) M 步 更新模型的参数

$$\lambda^{(t+1)} = \arg \max Q(\lambda | \lambda^{(t)}) \quad (19)$$

若  $\|\lambda^{(t+1)} - \lambda^{(t)}\| < \varepsilon$ , 停止; 否则, 返回步骤 1。

#### 4.2 估计标号场先验模型的参数

初始化, 设置相应的初始化模型参数  $\theta_{ij}^{(t=0)}$ ,  $t$  为迭代次数。

(1) E 步 计算小波系数和标号组成的完全数据条件概率的数学期望,表达形式如下:

$$Q(\theta_{ij} | \theta_{ij}^{(t)}) = E_{x_i}[\ln f(y, x_i | \theta_{ij}) | y, \theta_{ij}^{(t)}] \quad (20)$$

(2) M 步 更新模型的参数

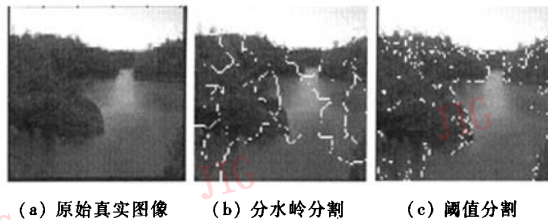
$$\theta_{ij}^{(t+1)} = \arg \max Q(\theta_{ij} | \theta_{ij}^{(t)}) \quad (21)$$

若  $\|\theta_{ij}^{(t+1)} - \theta_{ij}^{(t)}\| < \varepsilon$ , 停止; 否则, 返回步骤 1。

### 5 仿真实例与分析

实验采用尺寸为  $256 \times 256$  的真实图像和合成的纹理图像如图 4(a) 和图 5(a) 所示, 图像的灰度级为  $0 \sim 256$ 。为了进行对比, 用分水岭方法<sup>[14]</sup>、阈值法、非因果的 N-MRF 模型<sup>[1]</sup>、具有因果特性的建立在小波域上的 HMT 模型<sup>[6]</sup> 和本文方法分割图像。

仿真前, 首先用小波变换对图像进行分解, 由于图像是有限长的信号, 而小波变换需要信号是无限长的, 故必须对图像进行延拓。常用周期延拓和对



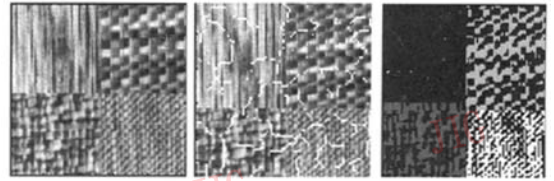
(a) 原始真实图像 (b) 分水岭分割 (c) 阈值分割



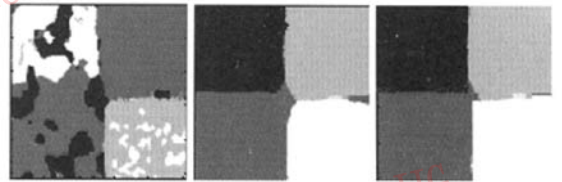
(d) N-MRF 分割 (e) HMT 分割 (f) 本文的方法

图 4 真实图像分割结果

Fig. 4 The segmentation results of real image



(a) 原始真实图像 (b) 分水岭分割 (c) 阈值分割



(d) N-MRF 分割 (e) HMT 分割 (f) 本文的方法

图 5 纹理图像分割结果

Fig. 5 The segmentation results of texture image

称延拓, 由于周期延拓在图像的边界产生了突变, 在计算的过程中引入了附加的边缘能量而产生失真, 对图像分割产生不利影响; 而对称延拓, 在经小波变换后图像的边界是连续的, 且得到的高频子带中没有附加能量的产生, 因此本文选用对称延拓。使用分水岭分割如图 4(b) 所示, 对图像造成了过分割, 将水和树都分成了几个不同的部分。而对于纹理图像用分水岭分割结果如图 5(b) 所示, 根本不能将 4 种纹理分割开来。使用阈值分割如图 4(c) 所示, 将树分为不同的部分, 这是由于阈值的确定是由局部窗口的大小决定的。使用阈值分割纹理图像结果如图 5(c) 所示, 不能将 4 种纹理分割开。使用非因果的 N-MRF 模型进行分割, 从图 4(d) 可以看出, 分割的图像呈现出结构的不完整性, 没有将水和树完全分开; 从图 5(d) 可以看出同一纹理被分割成不同的部分, 不同的纹理被分割成相同的部分。这是由于后验能量函数的非凸性, 在分割过程中陷入了局部极值所致。从图 4(d) 和图 5(d) 可以看出边缘定位不准确, 这说明像素的局部属性和特征属性发生了混叠, 表明固定邻域系统的 MRF 先验模型的马尔可夫参数具有有限能力描述图像较大尺度的行为。使用 HMT 模型分割图像, 如图 4(e) 所示, 分割的结构相对完整, 这是由于递阶模型粗尺度的标号对细尺度的标号确定具有指导作用, 从而容易形成较大的完整结构, 但 HMT 模型将树分割成不同的部分, 这是由于引入的状态数过少所致。从图 5(e) 可看出对边界的确定不太准确, 这是由于标号的确定不是

由父节点和其邻域节点的标号共同确定,而是相互独立的。使用本文方法分割图像,如图 4(f)所示,分割的结构较完整,将水和树基本完全分开,这是由于所建立的图像模型,更能体现图像的纹理特征。从图 4(f)和图 5(f)可以看出,边界定位较准确,这是由于标号的确定不仅考虑了父节点对子节点标号的影响,同时考虑了父节点的 3 个兄弟节点对子节点标号的共同影响,这样能准确地对小波系数进行分类,使边缘结构完整。

本文算法的主要计算量包括图像的小波变换,用 EM 算法估计模型的参数,以及从细尺度到粗尺度计算小波系数的似然值和从粗尺度到细尺度完成图像的分割过程。其中小波变换具有线性复杂度,用 EM 算法估计模型参数的复杂度为  $O(NL)$ ,  $N$  为小波系数的数目,  $L$  为图像的标号数,计算小波系数的似然值复杂度为  $O(NL)$ ,从粗尺度到细尺度完成图像分割的算法复杂度也为  $O(NL)$ ,因此本文算法具有线性复杂度  $O(NL)$ 。而非因果 N-MRF 模型的图像分割算法具有非线性复杂度,由于图像进行小波变换得到的小波系数是稀疏的,小波系数的数目小于像素的数目,因此本文算法不会增加算法的复杂度。

## 6 结 论

本文给出小波域层次 Markov 图像模型,由于层间具有因果属性,推导出了迭代 MAP 分割算法,这种模型克服了建立在像素级 MRF 模型边缘定位不准确和刻画图像非平稳性困难的弱点。利用小波刻画图像的非平稳性和多尺度特性,使 MRF 模型的特征属性和先验模型的参数具有变尺度行为,较好地刻画图像的纹理特征,仿真结果表明,这种模型和算法能提高图像的分割质量。

### 参考文献 (References)

- 1 Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6):721~741.
- 2 Max Mignotee, Christophe Collet, Patrick P, et al. Sonar image

- segmentation using an unsupervised hierarchical MRF model [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(7):1216~1231.
- 3 Bouman CA, Shaapiro M. A multiscale random field model for Bayesian image segmentation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1994, 3(2):162~177.
- 4 Matthew S Crouse, Robert D Nowak, Richard G Baraniuk. Wavelet-based statistical signal processing using hidden markov models [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(4):886~902.
- 5 Justin K Romberg, Hyeokho Choi, Richard G Baraniuk. Bayesian tree-structured image modeling using wavelet-domain hidden markov models [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(7):1056~1068.
- 6 Hyeokho Choi, Richard G Baraniuk. Multiscale image segmentation using wavelet-domain hidden Markov models [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(9):1309~1321.
- 7 Jien Kato, Joga S, Rittscher J, et al. An HMM-Based segmentation method for traffic monitoring movies [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(9):1291~1296.
- 8 Hou Yu-hua, Yang Xiao-yi, Song Jin-ping, et al. Multiscale document segmentation based on wavelet-domain multistate hidden Markov tree model [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2002, 24(12):1885~1891. [侯玉华, 杨晓艺, 宋锦萍等. 基于小波域多状态隐马尔可夫树模型多尺度文本图像分割 [J]. 电子与信息学报, 2002, 24(12):1885~1891.]
- 9 Chang S Grace, Yu B, Martin Vetterli. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(9):1532~1546.
- 10 Ulaby F T, Kouyate F. Texture information in SAR images [J]. IEEE Transactions on Geoscience Remote Sensing, 1986, 24(2):235~245.
- 11 Hu Yong-jian, Sam Kwong, Chan Y K. The design and application of DWT-domain optimum decoders [A]. In: Proceedings of the 24th International Conference on Distributed Computing Systems Workshops [C], Piscataway, USA, 2002: 22~30.
- 12 Dempster A P, Lard N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via EM algorithm [J]. Journal Royal Statistics Society, 1977, 39(1):1~37.
- 13 Mary L Comer, Edward J Delp. The EM/MPM algorithm for segmentation of textured images: analysis and further experimental result [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(10):1731~1744.
- 14 Rafael C G, Richard E W, Steven L E. Digital image processing using MATLAB [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004.